

**Zestaw 8 - kolorowania wierzchołkowe**

Definicje: kolorowanie właściwe, liczba chromatyczna

1. Udowodnij, że:

(a)  $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ ,

(b)  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

2. Udowodnij, że dla grafu  $G$  o  $m$  krawędziach,  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ .

3. **Tw.** Jeśli  $\chi(G) < k$ , to  $G$  ma orientację, która nie zawiera ścieżki długości  $k$ .

4. Ile wynosi liczba chromatyczna hiperkostki  $Q_d$ ?

5. Dany jest graf  $G$ , który ma podgraf  $K_4$  oraz  $\Delta(G) = 4$ . Ile wynosi liczba chromatyczna tego grafu?

**Def.** Graf  $G$  nazywamy  $k$ -krytycznym, gdy  $\chi(G) = k$  oraz po usunięciu dowolnego wierzchołka otrzymamy graf o mniejszej liczbie chromatycznej.

6. Wyznacz wszystkie grafy 2-krytyczne oraz 3-krytyczne.

7. Podaj przykład grafu 4-krytycznego.

8. **Tw.** Jeśli graf jest  $k$ -krytyczny, to  $\delta(G) \geq k$ .

---